

La Récurrence

1

Axiome : Le principe de récurrence

Soit $P(n)$ une propriété dépendant $n \in \mathbb{N}$.

Si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- $P(n_0)$ est vraie avec $n_0 \in \mathbb{N}$ (condition d'initialisation)

- $\forall n \geq n_0$, si $P(n)$ est vraie alors $P(n+1)$ est vraie

Alors, $\forall n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie

(condition d'hérédité)

Les étapes :

Etape 1 : Initialisation

On vérifie que $P(n_0)$ est vraie

Etape 2 : Hérédité

On vérifie que, si $P(n)$ est vraie à un certain rang $n \geq n_0$, alors $P(n+1)$ est vraie aussi

(hypothèse de récurrence)

Etape 3 : Conclusion

On conclut : "D'après { l'axiome
le principe } de récurrence,
 $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie."

Exemple type :



Démontrons par récurrence que: $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$

Initialisation:

Si $n = 0$, alors $P(0)$ est vraie

Donc la propriété est vraie au rang $n = 0$

Hérédité:

Supposons que la propriété soit vraie à un rang $n \in \mathbb{N}$ et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$.

C'est-à-dire, supposons qu'à un rang $n \in \mathbb{N}, P(n)$ et montrons que $P(n+1)$

[...] (d'après l'hypothèse de récurrence)

Ainsi $P(n+1)$

Donc, la propriété est vraie au rang $n+1$, elle est héréditaire.

Conclusion:

D'après $\left\{ \begin{array}{l} \text{l'axiome} \\ \text{le théorème} \\ \text{le principe} \end{array} \right\}$ de récurrence

$\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$